13.2 Толық дифференциалды теңдеулер

Анықтама. Егер толық дифференциалы қандай да бір облыста теңдеудің сол жағындағы өрнекке тең болатын $u(x;y)$ функциясы табылса, онда

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (13.2)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу толық дифференциалды теңдеу деп аталады.

Сонымен,

$$Mdx + Ndy \equiv du(x) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \qquad (13.2.1))$$

Теорема. $M(x;y), N(x;y)$ үзіліссіз және дифференциалданатын функция және $\frac{\partial M}{\partial y}$ пен $\frac{\partial N}{\partial x}$ қандай да бір облыста үзіліссіз болсын. (13.2) теңдеуі толық дифференциалды теңдеу болуы үшін:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (13.2.2)$$

шарты орындалуы қажетті және жеткілікті. Және жалпы интеграл мына түрде жазылады:

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0;y)dy = C, \qquad (13.2.3)$$

немесе: $\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C, \qquad (13.2.4)$

мұндағы $M_0(x_0, y_0) \in D$.

№10.20

$2xydx + (x^2 - e^y)dy = 0$ теңдеуінің $y(2) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын тап.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

1) $\int 2xydx = x^2y$

2) $\int (x^2 - e^y)dy = x^2y - e^y$

Жалпы шешім: $x^2y - e^y = C$

Алғашқы шарттағы мәндерді қойып, тұрақтыны анықтаймыз:

$2^2 \cdot 0 - e^0 = C$

$C = -1$

Табылған тұрақтыны жалпы шешімге қойып, дербес шешімді табамыз:

$x^2y - e^y = -1$

14- лекция

14.1 Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер.

Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің негізгі түрлері және оны шешу әдістері

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі түрлерін қарастырамыз:

1) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ **(1)** –

бұл дифференциалдық теңдеудің құрамына ізделініп отырған y функциясы мен оның (k-1)-ретке дейінгі туындылары кірмейді. Бұл жағдайда, ретін төмендету мына ауыстыру көмегімен жүзеге асырылады:

$$y^{(k)} = z, y^{(k+1)} = z', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

$$y''' - y'' = 0 \Rightarrow$$

14.1 мысал. $\left| y'' = z, y''' = z' \right| \Rightarrow$

$$z' - z = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{z} = dx; \quad \int \frac{dz}{z} = \int dx;$$

$$\ln z = x + \ln C_1; \quad \ln \frac{z}{C_1} = x$$

$$\frac{z}{C_1} = e^x; \quad z = C_1 e^x;$$

$$y'' = C_1 e^x \Rightarrow$$

$$y' = \int C_1 e^x dx + C_2 = C_1 e^x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = \int \left[C_1 e^x + C_2 \right] dx \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

2) $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ **(2)**

Жоғарғы ретті бұл теңдеудің түріне тәуелсіз айнымалы x кірмейді. Бұл жағдайда мынадай белгілеу енгіземіз: $y' = \frac{dy}{dx} = p$. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қолданып, мына теңдіктерді аламыз:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dp}{dx} \frac{dp}{dy} + p \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dy} = p\left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}, \dots \quad .$$

Дәл осылай, одан да жоғарғы ретті туындыларын тауып, орнына қойсақ $y^{(k)}$ туындылары *p=p(y)* функциясының y-тен тәуелді *k-1* реттен аспайтын туындылары арқылы өрнектелетіні анық, бұл теңдеудің ретін бір санға келтіруге мүмкіндік тудырады. Бұл жағдайды мысал көмегімен қарастырып көрелік.

14.2 мысал. $yy'' + (y')^2 = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1; y'(0) = 1$ алғашқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін табыңыз.

Алмастыру енгіземіз: $y' = p$; $y'' = \cdot p \cdot \frac{dp}{dy}$, онда

$$ypp' - p^2 = p$$

$$yp\frac{dp}{dy} = -p^2$$

$$\frac{1}{p}dp = -\frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{1}{p}dp = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln p = -\ln y + \ln C_1$$

$$p = \frac{C_1}{y}$$

Алғашқы шарттағы мәндерді қойып, тұрақтыны анықтаймыз:

$$y' = \frac{C_1}{y}.$$

$$1 = \frac{C_1}{1} \qquad C_1 = 1$$

$$y' = \frac{1}{y} \text{ аадт}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$ydy = dx$$

$$\int ydy = \int dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x + C_2 \text{ Жалпы шешім.}$$

Алғашқы шарттағы мәндерді қойып, тұрақтыны анықтаймыз:

$$\frac{1}{2} = C_2$$

Табылған тұрақтыны жалпы шешімге қойып, дербес шешімді табамыз:

$$\frac{y^2}{2} = x + \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 2x + 1$$

Дербес шешім: $y = \sqrt{2x+1}$

3) $y^{(n)} = f(x)$

түріндегі, яғни, оң жағы тек x айнымалысына ғана тәуелді болатын дифференциалдық теңдеуді қарастырайық.

Онда $y = \int\int...\int f(x)dxdx...dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n$ - теңдеудің жалпы шешімі.

11 блок. $y''' = 2x + 3$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі:

$$y''' = 2x + 3$$

Біртіндеп интегралдасақ:

$$y'' = \int (2x+3)dx = x^2 + 3x + C_1,$$

$$y' = \int (x^2 + 3x + C_1)dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{2} + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

14.2 Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1. Теңдеулер шешімінің жалпы құрылымы

Анықтама. n - ші ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп мына түрдегі теңдеуді айтамыз:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad \textbf{(1)}$$

мұндағы $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ теңдеудің коэффиценттері, қандай да кесіндіде үзіліссіз функциялар.

Теңдеудің оң жағы $L[y] \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny$ сызықты оператор деп аталады. $L[y_1 \pm y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2]$ және $L[Cy] \equiv CL[y]$ теңдігі орындалатынына оңай көз жеткізуге болады, $C - const$.

Теорема 1. (Пикар). Қандай да бір $\overline{D}$ облысының барлық нүктелерінде үзіліссіз болатын $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ және $f(x)$ функциялары үшін (1) Коши есебінің тек жалғыз ғана шешімі табылады.

Ары қарай, біз $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ және $f(x)$ функцияларын D облысында үзіліссіз деп қарастырамыз.

1. Сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$$L[y] = 0 \qquad (2)$$

Анықтама. $y_1, y_2, ..., y_m$ функциялары $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелді деп аталады, егер төмендегі теңдеуді қанағаттандыратын барлығы бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, тұрақтылары табылатын болса:

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_my_m = 0, \qquad \forall x \in (a;b)$$

кері жағдайда, сызықты тәуелсіз деп аталады.

Сызықты тәуелді $y_1, y_2,..., y_n$ функцияларының $(n-1)$ - ші ретке дейінгі туындылары бар болса, онда олар Вронский анықтауышы деп аталатын:

$$W[y_1; y_2; \ldots; y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

анықтауыш көмегімен анықталады.

Теорема 2. Егер $y_1, y_2,..., y_n$ функциялары $(a;b)$, аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы $(a;b)$ аралығында $W[y_1, y_2,..., y_n] \equiv 0$.

Теорема 3. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2,..., y_n$ $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелсіз функциялар болса, онда $\forall x \in (a\ ;\ b)$: $W[y_1, y_2,..., y_n] \neq 0$.

Анықтама. Кез келген (2) теңдеуінің n сызықты тәуелсіз дербес шешімдер жүйесі фундаментальдық шешімдер жүйесі деп аталады.

Теорема 4. (2) дифференциалдық теңдеуінің әрқашанда фундаменталдық шешімдер жүйесі табылады.

Теорема 5. Егер $y_1, y_2,..., y_n$ - (2) теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

мұндағы C_i, $i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар және бұл да (2) теңдеуінің шешімі болады.

(3) шешімінде n тұрақты бар. Қандай шарт орындалғанда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Теорема 6. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2,..., y_n$ фундаменталдық шешімдер жүйесін құраса, онда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.
3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008
4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.